

Tema: Ángulos

1. Concepto de Ángulo

Un **ángulo** es la abertura formada por **dos semirrectas** que parten de un mismo punto.

- El punto donde se unen se llama **vértice**.
- Las semirrectas se llaman **lados del ángulo**.

Ejemplo simbólico:

$\angle ABC$

- B = vértice
 - BA y BC = lados del ángulo
-

2. Medición de los Ángulos

Los ángulos se miden en **grados** ($^{\circ}$).

Una vuelta completa mide:

360°

Media vuelta:

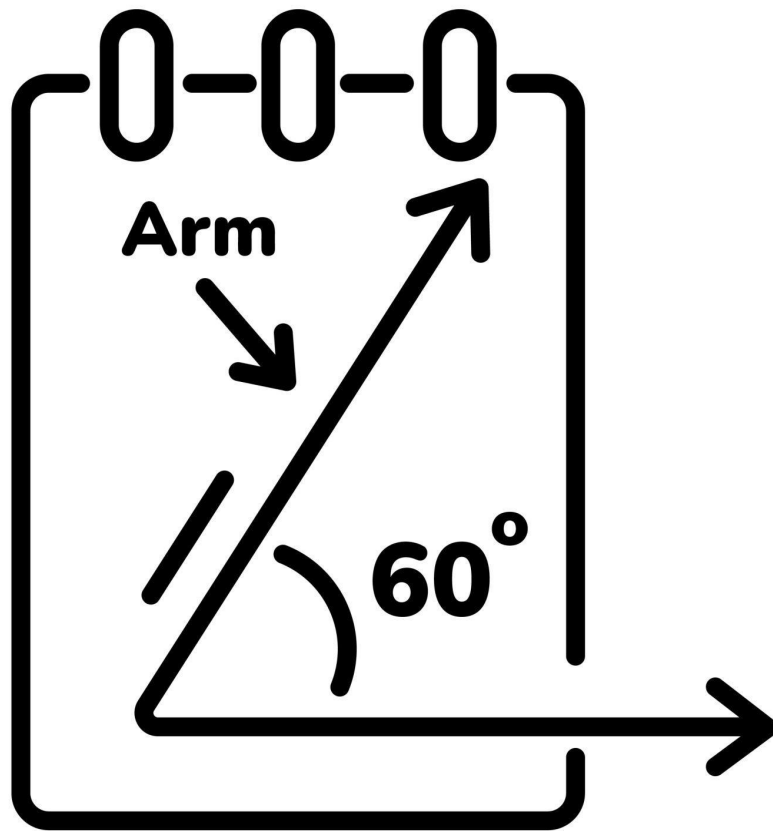
180°

Un cuarto de vuelta:

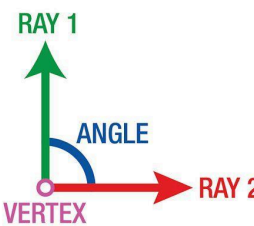

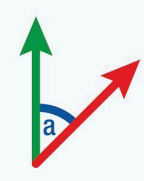
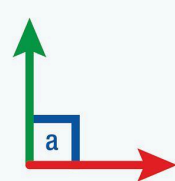
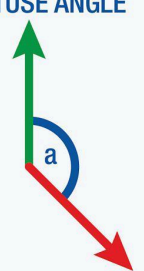

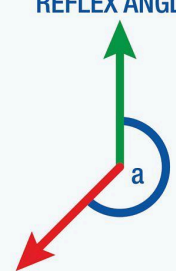
90°

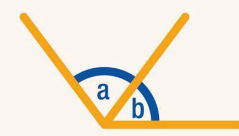
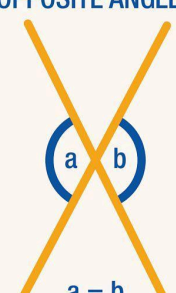
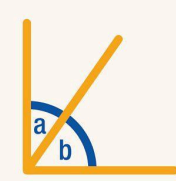
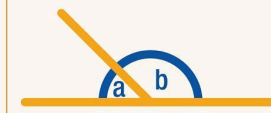
3. Tipos de Ángulos

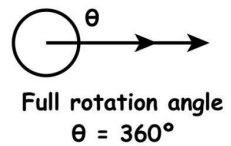
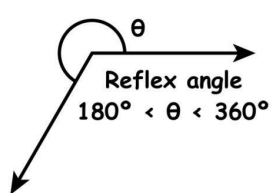
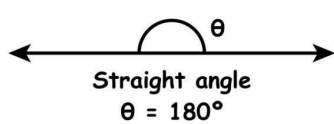
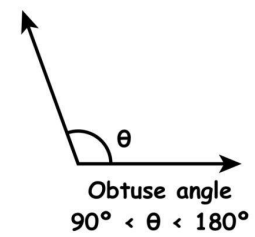
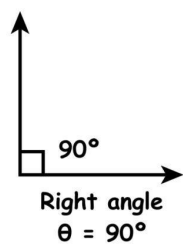
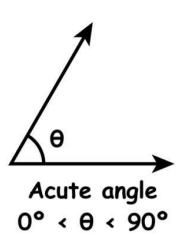
Ángulo agudo



Acute Angle

	<p>ZERO DEGREE ANGLE</p>  <p>$a = 0^\circ$</p>	<p>ACUTE ANGLE</p>  <p>$0^\circ < a < 90^\circ$</p>	<p>RIGHT ANGLE</p>  <p>$a = 90^\circ$</p>
	<p>OBTUSE ANGLE</p>  <p>$90^\circ < a < 180^\circ$</p>	<p>STRAIGHT ANGLE</p>  <p>$a = 180^\circ$</p>	<p>REFLEX ANGLE</p>  <p>$180^\circ < a < 360^\circ$</p>

<p>ADJACENT ANGLES</p> 	<p>OPPOSITE ANGLES</p>  <p>$a = b$</p>	<p>COMPLEMENTARY ANGLES</p>  <p>$a + b = 90^\circ$</p>	<p>SUPPLEMENTARY ANGLES</p>  <p>$a + b = 180^\circ$</p>
--	---	---	---

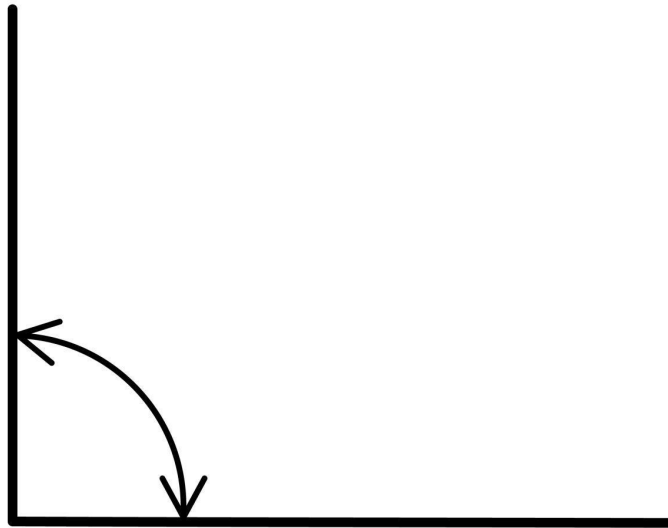


Mide menos de 90°

Ejemplo:
 30° , 45° , 60°

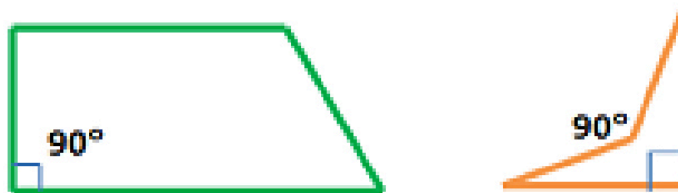
Ángulo recto

90° ANGLE

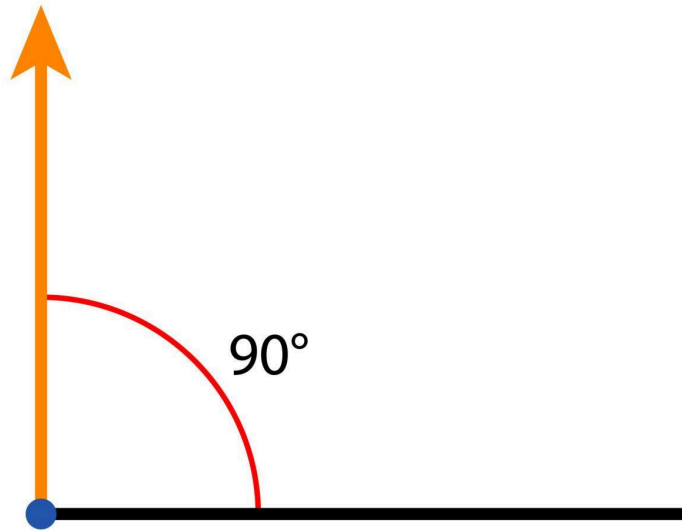




Quadrilaterals



Right Angle



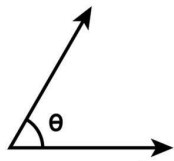
An Angle that is exactly 90°

4

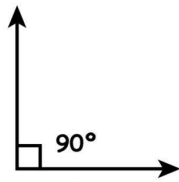
Mide exactamente:

90°

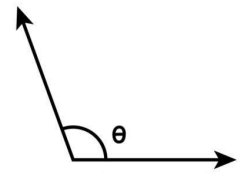
Ángulo obtuso



Acute angle
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$



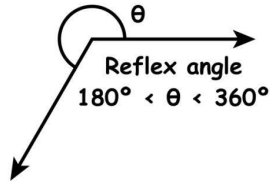
Right angle
 $\theta = 90^\circ$



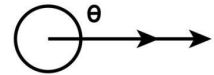
Obtuse angle
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$



Straight angle
 $\theta = 180^\circ$

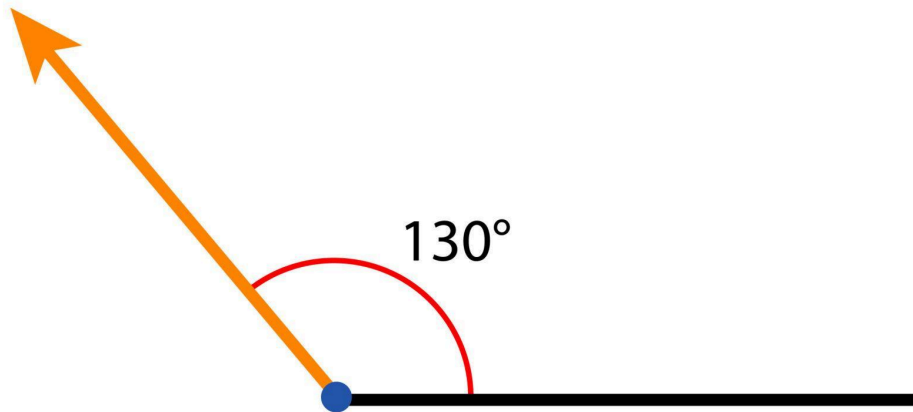


Reflex angle
 $180^\circ < \theta < 360^\circ$



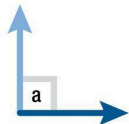


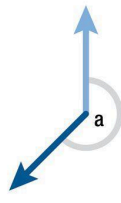



Full rotation angle
 $\theta = 360^\circ$

Obtuse Angle



An Angle that is greater than 90° and less than 180°

						
$a = 0^\circ$	$0^\circ < a < 90^\circ$	$a = 90^\circ$	$90^\circ < a < 180^\circ$	$a = 180^\circ$	$180^\circ < a < 360^\circ$	$a = 360^\circ$
ZERO DEGREE ANGLE	ACUTE ANGLE	RIGHT ANGLE	OBTUSE ANGLE	STRAIGHT ANGLE	REFLEX ANGLE	FULL ANGLE

4

Mide más de 90° pero menos de 180°

Ejemplo:

110°, 135°, 150°

Ángulo llano

Mide exactamente:

180°

Representa una línea recta.

Ángulo completo

Mide:

360°

Es una vuelta completa.

4. Relaciones entre ángulos

Ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si:

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si:

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$$

Ángulos opuestos por el vértice

Cuando dos rectas se cruzan:

- Los ángulos opuestos **son iguales**

5 Ejemplos Resueltos Paso a Paso (Nivel Fácil)

Ejemplo 1

Un ángulo mide 30° .
Su complemento es:

Paso 1

Complementarios suman:

$$90^\circ$$

Paso 2

$$90 - 30 = 60^\circ$$

Respuesta

El complemento es 60°

Ejemplo 2

Un ángulo mide 120° .
Encuentra su suplemento.

Paso 1

Suplementarios suman:

$$180^\circ$$

Paso 2

$$180 - 120 = 60^\circ$$

Respuesta

El suplemento es 60°

Ejemplo 3

Si dos ángulos son complementarios y uno mide **40°**, encuentra el otro.

Paso 1

Complementarios:

$$90^\circ$$

Paso 2

$$90 - 40 = 50^\circ$$

Respuesta

El otro ángulo mide **50°**

Ejemplo 4

Si dos ángulos son suplementarios y uno mide **75°**, encuentra el otro.

Paso 1

Suplementarios:

$$180^\circ$$

Paso 2

$$180 - 75 = 105^\circ$$

Respuesta

El otro ángulo mide **105°**

Ejemplo 5

Dos rectas se cruzan formando un ángulo de **65°**.

¿Cuánto mide el ángulo opuesto?

Propiedad

Ángulos opuestos por el vértice **son iguales**

Respuesta

El ángulo mide 65°

5 Ejercicios para los Estudiantes

1. Un ángulo mide 25° .
Encuentra su complemento.
 2. Un ángulo mide 140° .
Encuentra su suplemento.
 3. Dos ángulos son complementarios.
Uno mide 35° .
Encuentra el otro.
 4. Dos ángulos son suplementarios.
Uno mide 110° .
Encuentra el otro.
 5. Dos rectas se cruzan formando un ángulo de 52° .
¿Cuánto mide el ángulo opuesto?
-

5 Ejercicios de Aplicación

Estos obligan a **pensar más**.

Ejercicio 1

Dos ángulos complementarios están en razón:

2 : 3

Encuentra ambos ángulos.

Ejercicio 2

Dos ángulos suplementarios están en razón:

4 : 5

Encuentra ambos ángulos.

Ejercicio 3

En una recta se forman tres ángulos consecutivos:

$$40^\circ, x^\circ, 60^\circ$$

Encuentra el valor de x .

Ejercicio 4

Dos rectas se cruzan formando cuatro ángulos.
Uno mide 70° .

Encuentra los otros tres.

Ejercicio 5

Dos ángulos suplementarios cumplen:

$$x + (x + 30) = 180$$

Encuentra los valores de los ángulos.

Resumen de Procedimientos (Para revisar tareas)

Ejercicio 1

Complemento:

$$90 - 25 = 65^\circ$$

Ejercicio 2

Suplemento:

$$180 - 140 = 40^\circ$$

Ejercicio 3

$$90 - 35 = 55^\circ$$

Ejercicio 4

$$180 - 110 = 70^\circ$$

Ejercicio 5

Ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Respuesta:

$$52^\circ$$

Aplicación

Ejercicio 1

$$2x + 3x = 90$$

$$5x = 90$$

$$x = 18$$

Ángulos:

$$36^\circ \text{ y } 54^\circ$$

Ejercicio 2

$$4x + 5x = 180$$

$$9x = 180$$

$$x = 20$$

Ángulos:

$$80^\circ \text{ y } 100^\circ$$

Ejercicio 3

$$40 + x + 60 = 180$$

$$x = 80^\circ$$

Ejercicio 4

Ángulos:

$$70^\circ$$

$$110^\circ$$

$$70^\circ$$

$$110^\circ$$

Ejercicio 5

$$x + x + 30 = 180$$

$$2x + 30 = 180$$

$$2x = 150$$

$$x = 75$$

Ángulos:

$$75^\circ \text{ y } 105^\circ$$

1. 10 Preguntas Conceptuales (para discusión)

Estas preguntas **no requieren cálculo**, solo comprensión.

Pregunta 1

Si dos ángulos son complementarios y uno aumenta, ¿qué ocurre con el otro?

Discusión esperada:

Debe disminuir para que la suma siga siendo **90°**.

Pregunta 2

¿Puede un ángulo ser **agudo y obtuso al mismo tiempo**?

Respuesta:

No, porque:

- agudo $< 90^\circ$
 - obtuso $> 90^\circ$
-

Pregunta 3

¿Puede existir un ángulo negativo?

Esto abre discusión interesante.

En geometría básica **no**, pero en trigonometría **sí** (dirección de rotación).

Pregunta 4

Si dos rectas se cruzan, ¿siempre forman ángulos iguales?

Respuesta:

No.

Forman **dos pares de ángulos iguales**.

Pregunta 5

Si un ángulo mide **90°** , ¿puede tener complemento?

Respuesta:

No.

Porque:

$$90 + x = 90$$

$$x = 0$$

Pregunta 6

Si dos ángulos son suplementarios, ¿pueden ambos ser obtusos?

Respuesta:

No.

Porque dos obtusos sumarían **más de 180°**.

Pregunta 7

¿Puede un ángulo ser mayor que **360°**?

Sí.

Se llama **ángulo mayor que una vuelta** (en trigonometría).

Pregunta 8

Si un ángulo mide **180°**, ¿cómo se llama?

Ángulo **llano**.

Pregunta 9

Si dos ángulos opuestos por el vértice son iguales, ¿qué ocurre con los otros dos?

También son iguales entre sí.

Pregunta 10

Si tres ángulos forman una línea recta, ¿cuánto suman?

180°

2. 5 Problemas que confunden a los estudiantes

Estos parecen fáciles, pero **muchos fallan**.

Problema 1

Dos ángulos complementarios cumplen:

x y $2x$

Encuentra los ángulos.

Solución:

$$x + 2x = 90$$

$$3x = 90$$

$$x = 30$$

Ángulos:

30° y 60°

Problema 2

Dos ángulos suplementarios son:

x y $x + 40$

Encuentra ambos.

$$x + (x + 40) = 180$$

$$2x + 40 = 180$$

$$2x = 140$$

$$x = 70$$

Ángulos:

70° y 110°

Problema 3

Tres ángulos sobre una recta miden:

x , x , 60°

Encuentra x .

$$x + x + 60 = 180$$

$$2x = 120$$

$$x = 60^\circ$$

Problema 4

Dos rectas se cruzan.

Un ángulo mide **50°**.

Encuentra los otros tres.

Ángulos:

50°

130°

50°

130°

Problema 5

Un ángulo es el triple del otro y son complementarios.

Sea:

x y $3x$

$$x + 3x = 90$$

$$4x = 90$$

$$x = 22.5$$

Ángulos:

22.5° y 67.5°

3. Problema clásico de ingeniería

Este problema se usa mucho para iniciar razonamiento geométrico.

Problema

Dos carreteras rectas se cruzan formando un ángulo de **70°**.

Un ingeniero necesita calcular el ángulo del cruce opuesto.

Pregunta:

¿Cuánto mide?

Respuesta:

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Entonces:

70°

Luego preguntas algo más interesante:

¿Cuánto miden los otros dos?

$$180 - 70 = 110^\circ$$

Entonces los cuatro ángulos son:

70°

110°

70°

110°

4. Un desafío interesante para la clase

Este problema genera discusión.

Problema

Si dos ángulos complementarios cumplen:

$$x + 10$$

$$x - 10$$

Encuentra ambos.

Solución:

$$(x + 10) + (x - 10) = 90$$

$$2x = 90$$

$$x = 45$$

Ángulos:

55° y 35°

5. Pregunta que engancha a los estudiantes

Haz esta pregunta al final de la clase:

Si un reloj marca las 3:00, ¿qué ángulo forman las agujas?

Respuesta:

90°

Luego pregunta:

¿y a las 2:00?

60°

Esto conecta **geometría con la vida real**.

Algo que puede servirte mucho como profesor

En la **segunda clase de geometría**, normalmente se enseña:

- 1) Ángulos formados por rectas paralelas
- 2) Ángulos alternos internos
- 3) Ángulos correspondientes
- 4) Ángulos conjugados

Ese tema es **donde el 70% de estudiantes se confunde**.

Si quieres, puedo prepararte también:

- ✓ Una segunda clase completa (nivel universitario)
- ✓ Con diagramas claros
- ✓ 15 ejercicios tipo examen
- ✓ y 5 problemas difíciles tipo ingeniería.

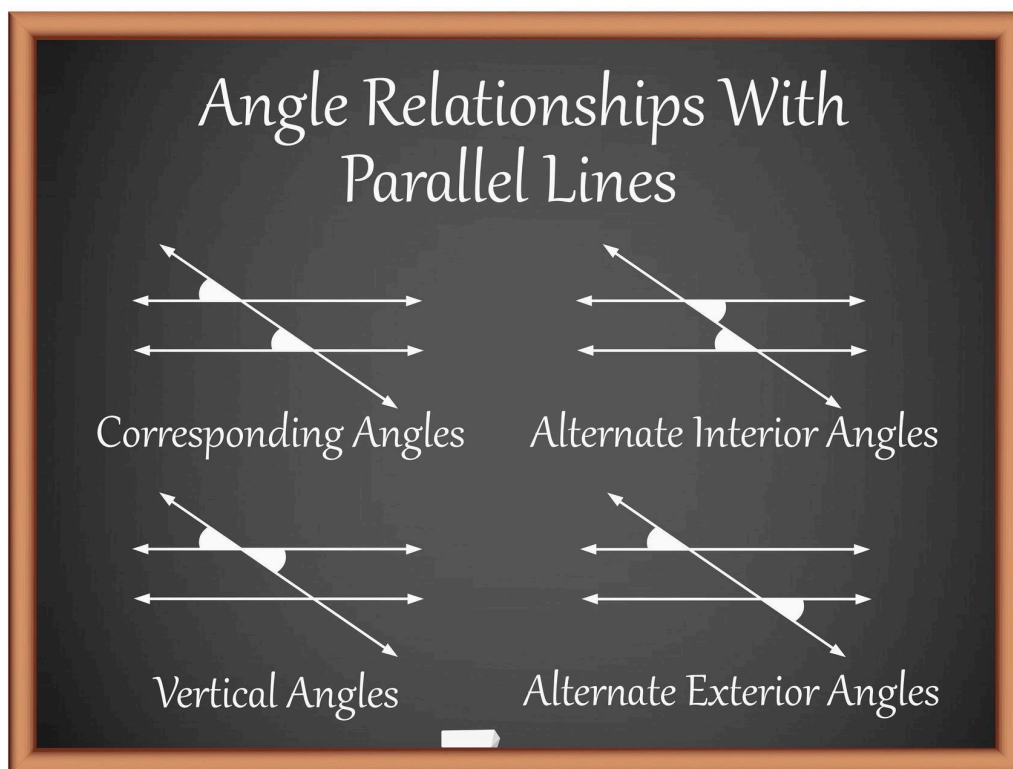
si

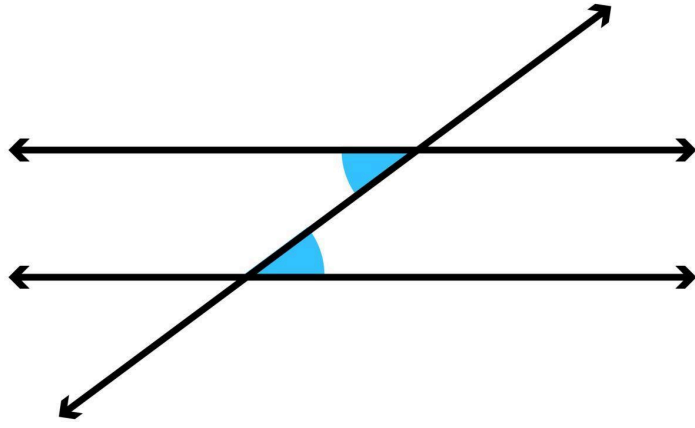
Perfecto. Te prepararé una **segunda clase completa de geometría** sobre **ángulos formados por rectas paralelas**, que normalmente es el siguiente tema después de los ángulos básicos. Mantendré el mismo formato que usas para tus clases: **explicación clara** → **ejemplos** → **ejercicios** → **aplicación** → **resumen para revisar**.

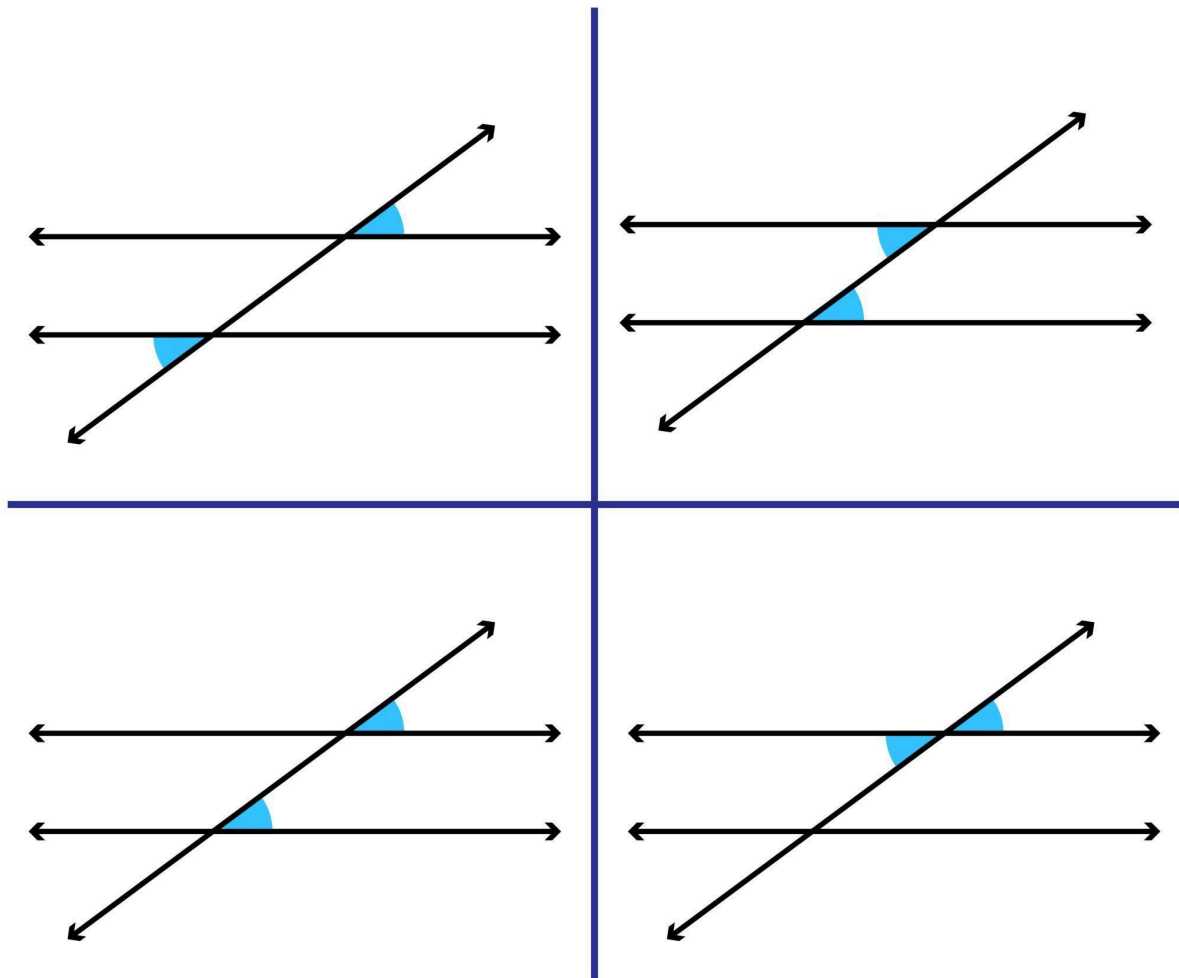
Clase 2 de Geometría

Ángulos formados por rectas paralelas

1. Rectas paralelas







4

Dos rectas son **paralelas** cuando:

- Nunca se intersectan
- Mantienen siempre la misma distancia entre ellas

Se representa con el símbolo:

//

Ejemplo:

$l_1 // l_2$

2. Recta transversal

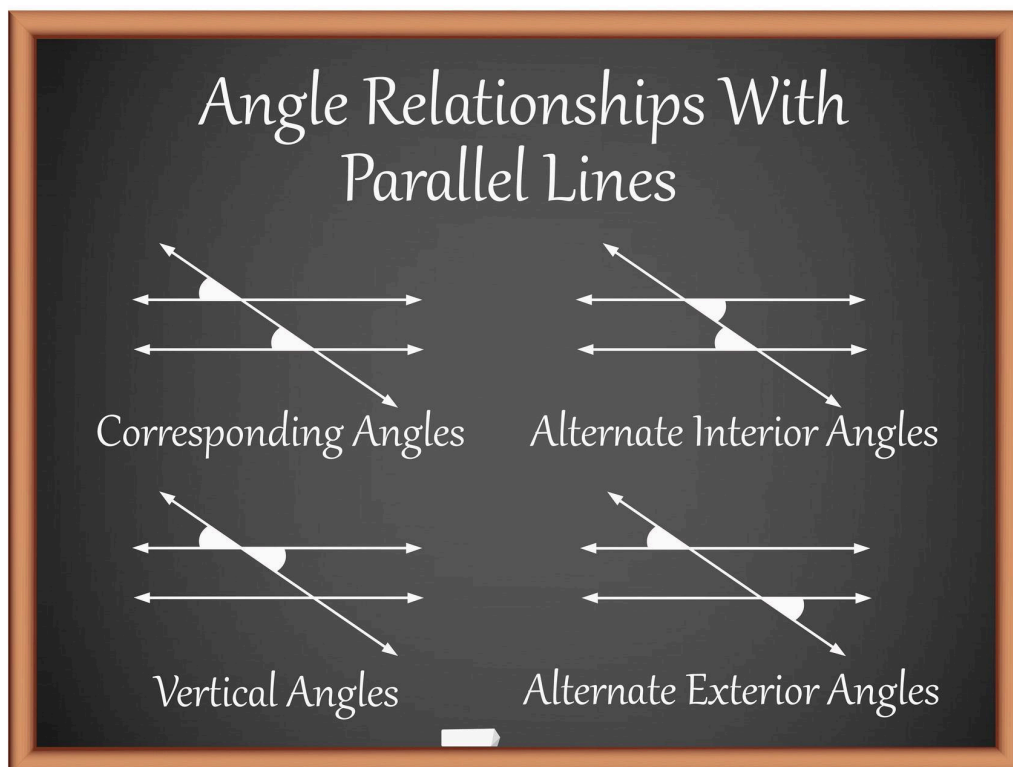
Una **recta transversal** es una recta que **corta a dos rectas paralelas**.

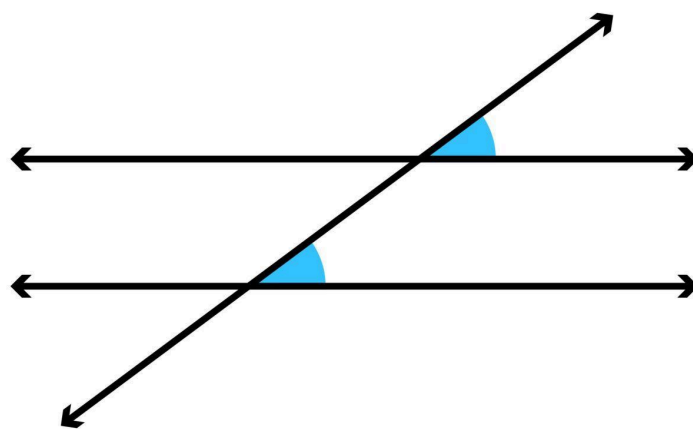
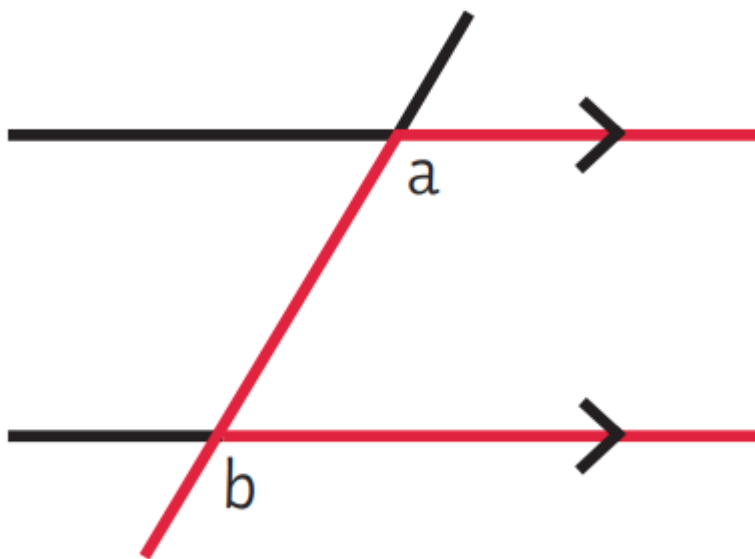
Cuando esto ocurre se forman **8 ángulos**.

Estos ángulos tienen relaciones especiales.

3. Tipos de ángulos importantes

Ángulos correspondientes





4

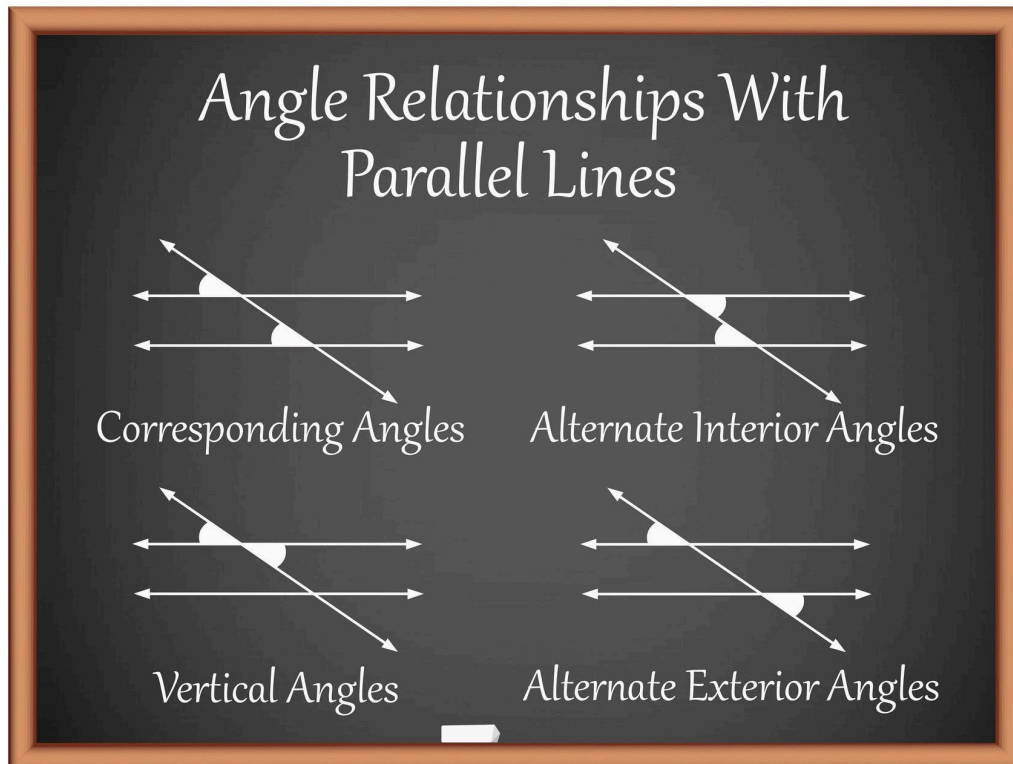
Los **ángulos correspondientes** están en la **misma posición relativa**.

Propiedad:

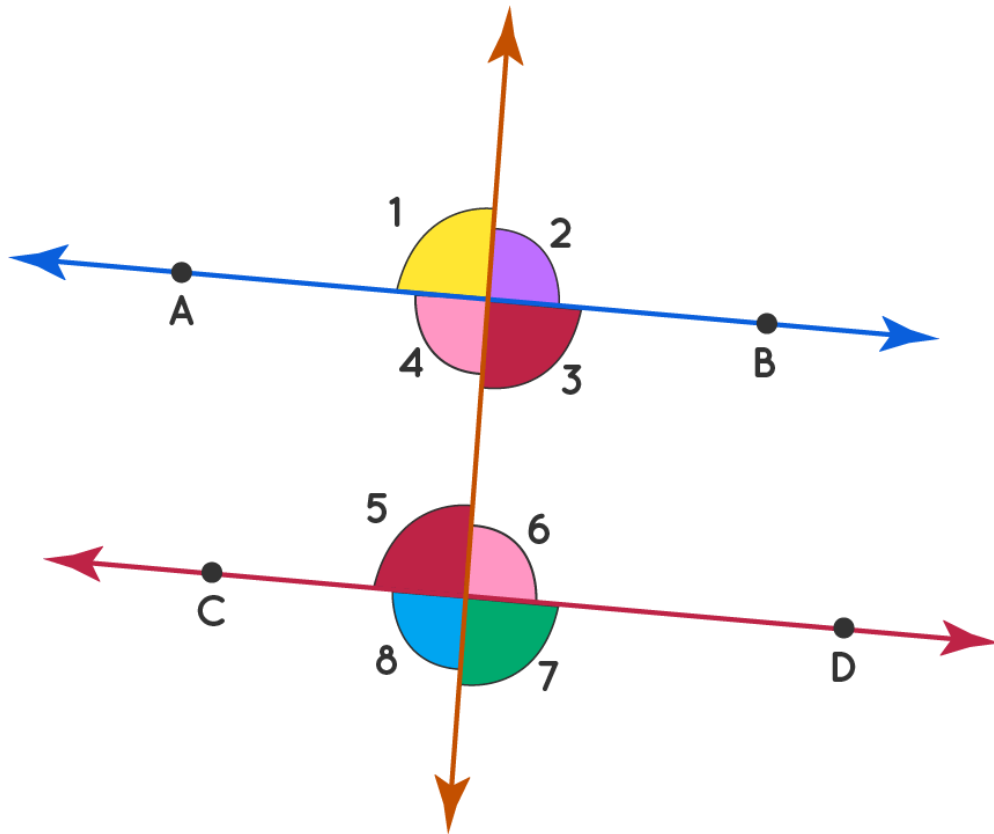
Si las rectas son paralelas:

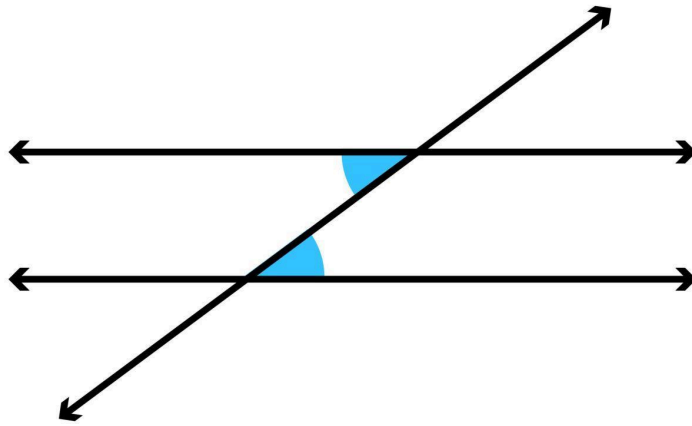
Los ángulos correspondientes son iguales

Ángulos alternos internos



Alternate Interior Angles





4

Están:

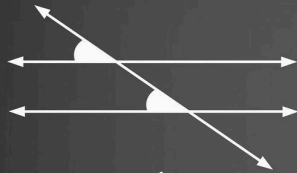
- Entre las dos rectas
- En lados opuestos de la transversal

Propiedad:

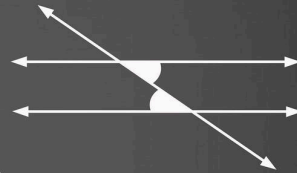
Son iguales

Ángulos alternos externos

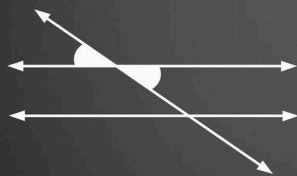
Angle Relationships With Parallel Lines



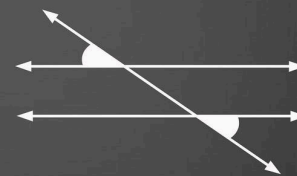
Corresponding Angles



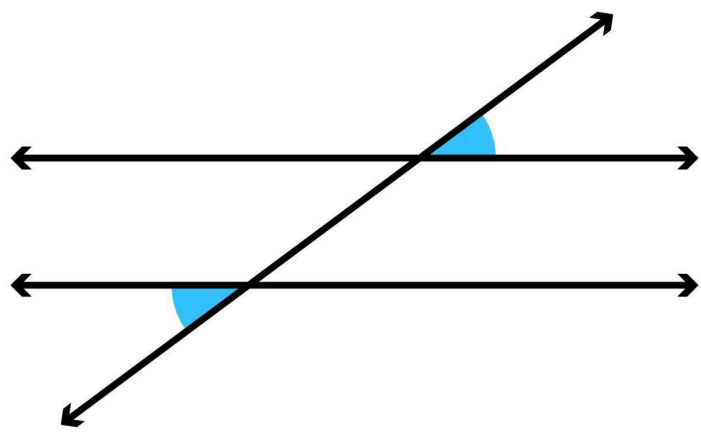
Alternate Interior Angles



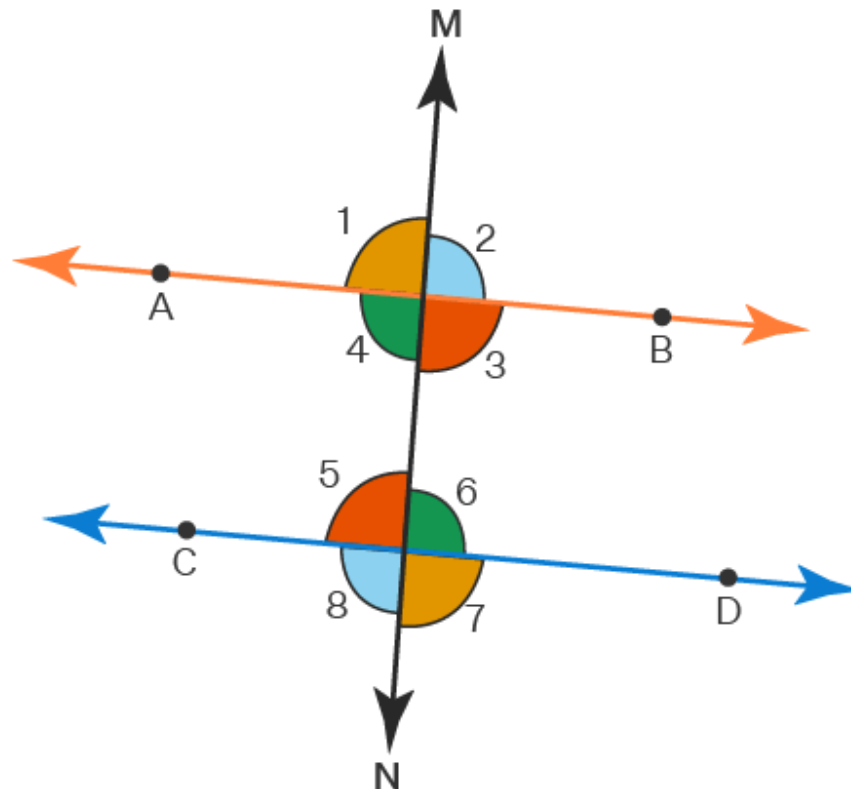
Vertical Angles



Alternate Exterior Angles



Alternate Exterior Angles



Alternate Exterior Angles:

$$\angle 1 = \angle 7,$$

$$\angle 2 = \angle 8$$

4

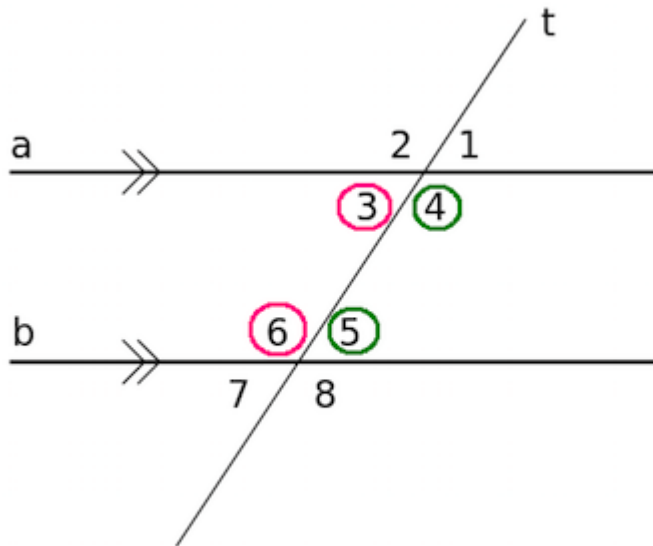
Están:

- Fuera de las rectas paralelas
- En lados opuestos de la transversal

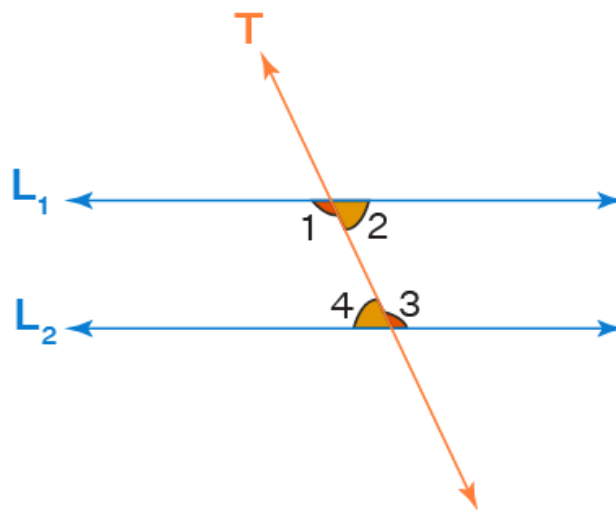
Propiedad:

Son iguales

Ángulos interiores consecutivos

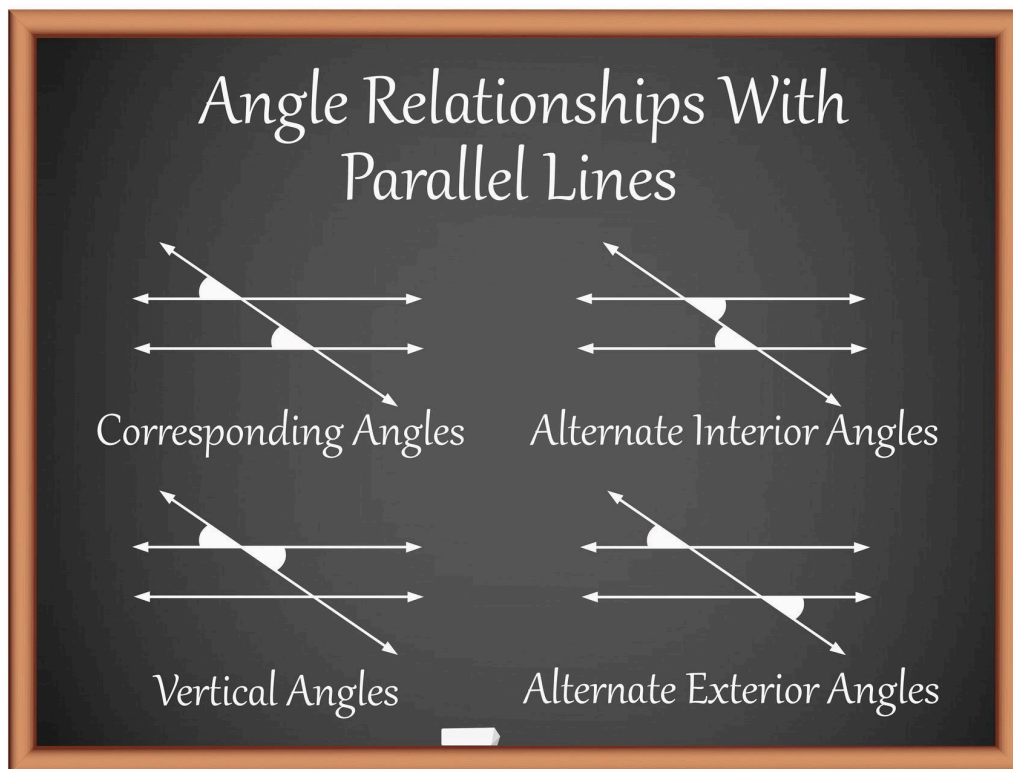


Consecutive Interior Angles



$\angle 1$ and $\angle 4$ — Consecutive interior angles (pair 1)

$\angle 2$ and $\angle 3$ — Consecutive interior angles (pair 2)



4

Están:

- Entre las rectas
- En el mismo lado de la transversal

Propiedad:

Suman 180°

Ejemplos Resueltos (Paso a Paso)

Ejemplo 1

Dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

Si un ángulo mide 70° , encuentra su correspondiente.

Propiedad

Ángulos correspondientes son iguales.

Respuesta:

70°

Ejemplo 2

Un ángulo alterno interno mide **55°**.

Encuentra el otro.

Respuesta:

55°

Ejemplo 3

Un ángulo interior consecutivo mide **120°**.

Encuentra el otro.

Paso 1

Los interiores consecutivos suman **180°**

Paso 2

$$180 - 120 = 60^\circ$$

Respuesta:

60°

Ejemplo 4

Un ángulo mide **40°**.

Encuentra el alterno externo.

Propiedad:

Alternos externos son iguales.

Respuesta:

40°

Ejemplo 5

Un ángulo mide **130°**.

Encuentra su interior consecutivo.

$$180 - 130 = 50^\circ$$

Respuesta:

50°

Ejercicios para los estudiantes

1. Si un ángulo correspondiente mide **65°**, ¿cuánto mide el otro?
 2. Un ángulo alterno interno mide **80°**.
Encuentra el otro.
 3. Un ángulo interior consecutivo mide **140°**.
Encuentra el otro.
 4. Un ángulo alterno externo mide **50°**.
Encuentra su par.
 5. Si un ángulo mide **95°**, encuentra su interior consecutivo.
-

Ejercicios de Aplicación

Ejercicio 1

Dos ángulos alternos internos son:

$$x \text{ y } x + 20$$

Encuentra x .

Ejercicio 2

Dos ángulos interiores consecutivos son:

$$x \text{ y } x + 30$$

Encuentra ambos.

Ejercicio 3

Un ángulo correspondiente mide $3x$ y el otro 60° .

Encuentra x .

Ejercicio 4

Un ángulo alterno interno mide $2x$ y el otro 100° .

Encuentra x .

Ejercicio 5

Dos ángulos interiores consecutivos son:

$$2x \text{ y } 3x$$

Encuentra ambos.

Resumen de respuestas (para revisar)

Ejercicios básicos

- 1 65°
- 2 80°
- 3 40°
- 4 50°
- 5 85°

Aplicación

Ejercicio 1

$$x = 40^\circ$$

Ejercicio 2

$$x + (x + 30) = 180$$

$$2x + 30 = 180$$

$$x = 75$$

Ángulos:

$$75^\circ \text{ y } 105^\circ$$

Ejercicio 3

$$3x = 60$$

$$x = 20$$

Ejercicio 4

$$2x = 100$$

$$x = 50$$

Ejercicio 5

$$2x + 3x = 180$$

$$5x = 180$$

$$x = 36$$

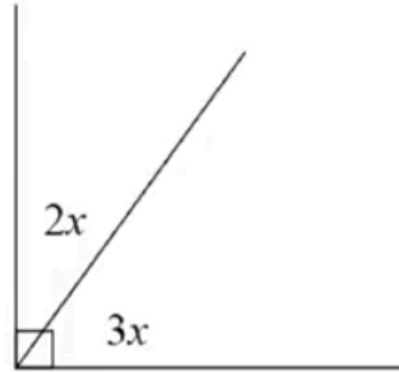
Ángulos:

$$72^\circ \text{ y } 108^\circ$$

Ejercicios

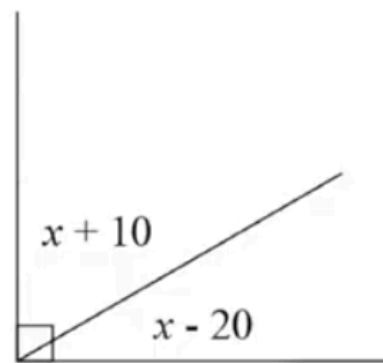
1. ¿Cuánto vale x en la siguiente figura?

- A) 54°
- B) 45°
- C) 36°
- D) 18°



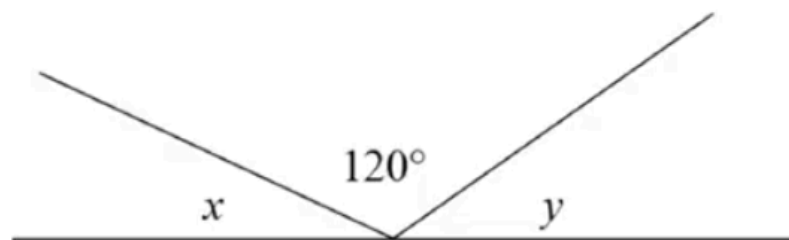
2. ¿Cuánto vale x en la siguiente figura?

- A) 30°
- B) 45°
- C) 50°
- D) 60°



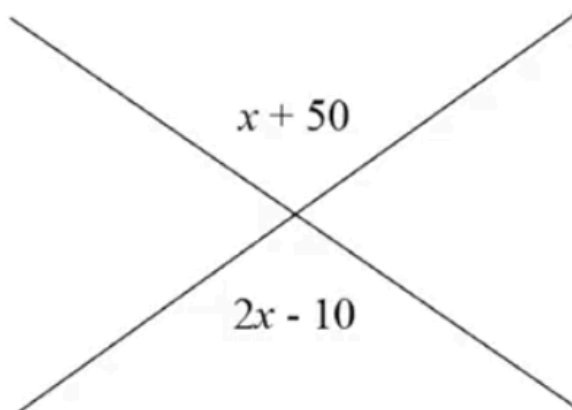
3. Si $x = y - 10$, ¿cuántos grados vale x ?

- A) 25°
- B) 35°
- C) 45°
- D) 55°

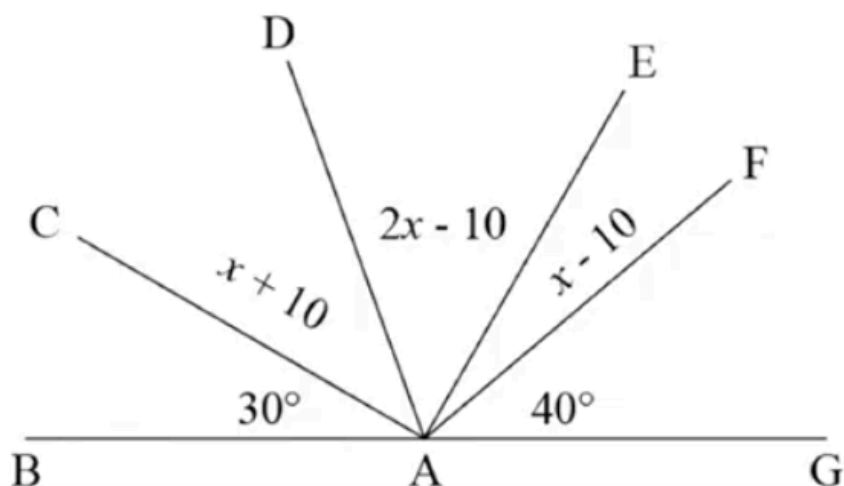


4. ¿Cuánto vale x en la siguiente figura?

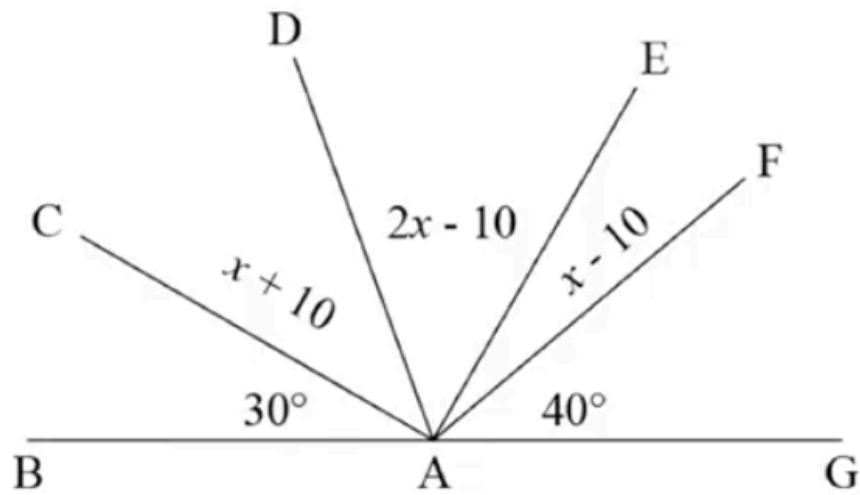
- A) 110°
- B) 70°
- C) 60°
- D) 40°



5. ¿Qué par de ángulos son congruentes?

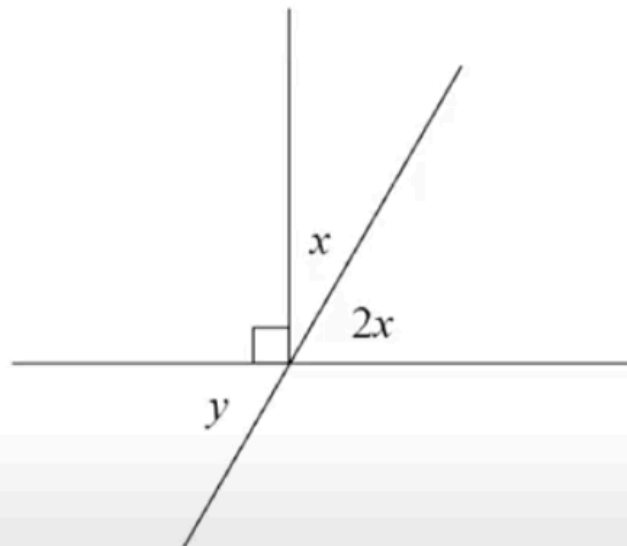


5. ¿Qué par de ángulos son congruentes?



- A) $\angle BAC$ y $\angle CAD$
- B) $\angle CAD$ y $\angle FAG$
- C) $\angle DAE$ y $\angle BAC$
- D) $\angle EAF$ y $\angle FAG$

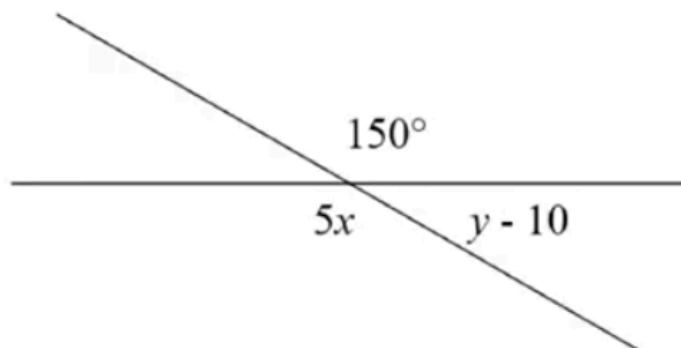
6. ¿Cuántos grados mide y ?



- A) 30°
- B) 40°
- C) 50°
- D) 60°

7. ¿A qué es igual $x + y$ en la siguiente figura?

- A) 70°
- B) 50°
- C) 42°
- D) 38°



8. ¿Cuánto mide y en la siguiente figura?

- A) 30°
- B) 50°
- C) 60°
- D) 130°

